北京科技大学
University of Science and Technology Beijing

密级：公开

本科生毕业设计(论文)

题 目：粗糙核奇异积分算子在 Block 核下的 Triebel-Lizorkin 空间有界性

作 者：李朝安

学 号：41721041

学 院：数理学院

专 业：数学与应用数学

成 绩：

2021 年 6 月

本科生毕业设计(论文)

题　　目：粗糙核奇异积分算子在 Block 核下的 Triebel-Lizorkin 空间有界性

英文题目：Boundedness of rough singular integral operator related to Block Space on the Triebel-Lizokin spaces

学　　院：数理学院

班　　级：数学 171

学　　生：李朝安

学　　号：41721041

指导教师：陈艳萍　职称：教授

声　　明

本人郑重声明：所呈交的论文是本人在指导教师的指导下进行的研究工作及取得研究结果。论文在引用他人已经发表或撰写的研究成果时，已经作了明确的标识；除此之外，论文中不包括其他人已经发表或撰写的研究成果，均为独立完成。其他同志对本文所做的任何贡献均已在论文中做了明确的说明并表达了谢意。

学生签名：＿＿＿＿＿＿　　＿＿＿＿年＿＿月＿＿日

导师签名：＿＿＿＿＿＿　　＿＿＿＿年＿＿月＿＿日

毕 业 设 计 (论 文) 任 务 书

一、学生姓名： 李朝安 学号：41721041

二、题　　目： 粗糙核奇异积分算子在 Block 核下的 Triebel-Lizorkin 空间有界性

三、题目来源： 自拟

四、结业方式： 论文

五、主要内容：

1. 了解和掌握 Triebel-Lizorkin 空间及 Besov 空间的一些性质；
2. 掌握粗糙核奇异积分算子的一些性质；
3. 建立粗糙核奇异积分算子在 Block 核下的 Triebel-Lizorkin 空间有界性.

六、主要(技术)要求：

1. 学会文献查阅方法；
2. 掌握相关的数学理论和方法；
3. 了解粗糙核奇异积分算子的最新进展和前沿结果；
4. 需要熟悉 Triebel-Lizorkin 空间的性质.

七、日程安排：

1 – 2 周 查阅并学习文献，准备文献综述；
3 – 4 周 完成并参加选题报告；
5 – 8 周 学习和掌握有关粗糙核奇异积分算子的有界性知识，写出中期检查报告；
9 – 13 周 完成全部研究内容，写出毕业论文；
14 – 15 周 论文送审并参加答辩.

八、主要参考文献和书目：

[1] 周民强. 调和分析讲义[M]. 北京：北京大学出版社，1999.
[2] Y. Chen，Y. Ding，H. Liu. Rough singular integrals supported on submanifolds [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2010，368(2): 677-691.
[3] E. B. Fabes，N. M. Rivi`ere. Singular integrals with mixed homogeneity [J]. Studia Mathematica，1966，1(27): 19-38.
[4] Y. Chen，Y. Ding. Rough singular integrals on Triebel-Lizorkin space and Besov space [J]. Journal of mathematical analysis and applications, 2008, 347(2): 493-501.
[5] D. K. Palagachev，L. G. Softova. Singular integral operators，Morrey spaces and fine regularity of solutions to PDE's [J]. Potential Analysis，2004，20(3): 237-263.

指导教师签字： 年 月 日

学 生 签 字： 年 月 日

系(所)负责人章： 年 月 日

摘　要

在现代数学研究中，其中一个重要的分支便是调和分析。其核心研究问题即一个函数的 Fourier 级数在满足什么条件，依何种意义收敛于函数本身。随着问题的逐步深入，人们发现，函数的 Fourier 级数的收敛问题，重点在于探讨 Hilbert 变换的有界性。而奇异积分正是 Hilbert 变换的高维推广，它的有界性是现代调和分析领域最重要的研究问题之一。

与此同时，奇异积分算子及其交换子的有界性是非连续函数的椭圆以及抛物方程的可解性问题的关键。偏微分方程领域的许多问题，都依赖于奇异积分算子的有界性。

在对奇异积分算子研究的过程中，很自然导致了一个关键问题。奇异积分算子核被削弱到何种程度时, 算子的有界性仍然成立。R. Fefferman 提出了一类粗糙奇异积分算子，自此人们开始对这个问题开展广泛研究。其中，为了改善前人的工作，陆善镇，G. Weiss 和 Mitchell Taibleson 引入了 Block 空间，Block 核的奇异积分算子开始受到关注。

随着对插值理论以及极大不等式等工具的理解不断加深，人们发现了 Triebel-Lizorkin 空间，它是上述许多标准函数空间的推广，在其上建立算子有界性更具有一般性。陈艳萍，丁勇在 2008 年证明，具有H^1核的粗糙奇异积分算子在 Triebel-Lizorkin 空间上有界。

本文研究的主要内容是，Block 核下的抛物型粗糙奇异积分算子，在 Triebel-Lizorkin 空间中的有界性。在证明的一些需要的不等式之后，完成了 Block 核下抛物型粗糙奇异积分算子的乘子符号估计。利用 Littlewood-Paley 理论与 Fourier 估计结合，再利用插值理论完成证明。

关键词：　奇异积分；粗糙核；Block 空间；Triebel-Lizorkin 空间

Boundedness of rough singular integral operator related to Block space on the Triebel-Lizokin spaces

Abstract

In modern mathematical research, one of the important branches is harmonic analysis. With the gradual deepening of the problem, people find that the focus of the convergence of Fourier series of functions is to discuss the boundedness of Hilbert transformation.

Singular integral is the high-dimensional generalization of Hilbert transform, and its boundedness is one of the most important research problems in the field of modern harmonic analysis.

In the process of studying the singular integral operator, there is a natural question. Under what kernel the boundedness of the singular integral operator will still hold?

In this process, Lu Shanzhen, G.Weiss and Mitchell Taibleson introduced Block spaces. It is proved that the rough kernel singular integral operator under Block kernel is bounded on L^2 space.

With the deepening of the understanding of interpolation theory and maximal inequality and other tools, people found Triebel Lizorkin space, which is an extension of many of the above standard function spaces. Chen Yanping and Ding Yong proved in 2008 that rough singular integral operators with H^1 kernel are bounded on Triebel Lizorkin spaces.

The main content of this paper is the boundedness of parabolic rough singular integral operators under Block kernel in Triebel-Lizorkin spaces. After proving some necessary inequalities, the multiplier symbol estimation of parabolic rough singular integral operators under Block kernel is completed. The conclusion is obtained after a series of interpolation.

Key Words： **singular integral；** **rough kernel；** **Blcok space；** **Triebel-Lizorkin space**

目　录

1 引　言

在现代数学研究中，其中一个重要的分支便是调和分析。其核心研究问题即一个函数的 Fourier 级数在满足什么条件, 以及什么意义下可以收敛于其本身。上个世纪，实变调和分析理论得到了深入的发展。Hardy、Littlewood、Paley、Zygmund、Marcinkiewicz 等人的工作为这一领域提供了有效的理论工具——Hardy-Littlewood 极大算子、Littlewood-Paley 理论等。人们发现，函数的 Fourier 级数的收敛问题，重点在于探讨 Hilbert 变换的有界性。而奇异积分正是 Hilbert 变换的高维推广, 其有界性是现代调和分析领域最重要的研究问题之一。

由于复分析在研究高维时，原先的许多方法（例如 Blaschke 乘积等）都不再有效。因此，人们寻求用实分析的手段来重新阐明这一领域的许多结果。在此过程中，拓广的一些辅助算子在偏微分方程，多复变函数论中凸显出重要作用。

为了研究奇异积分算子的有界性，1952 年 A. P. Calderón 和 A. Zygmund 引入了以他们名字命名的分解理论——Calderón-Zygmund 分解。为研究调和分析领域某些典型算子的连续性提供了更有力的工具。

1979 年， R. Fefferman 提出了一类粗糙奇异积分算子，引起了人们对粗糙奇异积分算子的关注。随后，出现的有关这类粗糙算子及其相关的粗糙极大算子的研究工作，丰富了经典奇异积分算子理论。人们将这些工作拓广至具有粗糙核的奇异积分算子的有界性问题上，对其进行广泛研究，并得到一系列有意义的结果。

奇异积分理论基本可以分为三代, 其中第一代包括 Hilbert 变换以及在$\mathbb{R}^n$上的 Calderón-Zygund 奇异积分算子的理论和其在L^p上的估计与极大算子等。第二代为经典伪微分算子，已不再是卷积算子，其目的是为处理十分正则的变系数椭圆型偏微分方程而创立的。第三代为广义 Calderón-Zygund 算子，主要为研究 Lipschitz 开集上用双层位势法解 Dirichlet 或 Neumann 问题而提出。在本文中，主要关注卷积型奇异积分算子的研究。

关于 Block 核下的抛物型奇异积分算子 Triebel-Lizorkin 空间上的有界性。根据前人工作，其关键是要建立$\Omega \in B_q^{0,0}$时，抛物型奇异积分算子$T_{\Omega,\alpha}$在非齐次 Triebel-Lizorkin 空间的有界性结果。经过一些基本的过程的使用，本文致力于对插值中需要的不等式进行了推广, 以及将q-blcok 分解为适合符号估

计条件的∞-原子。建立了 Block 核下的抛物型奇异积分算子 Triebel-Lizorkin 空间上的有界性。本文的主要结果如下：

定理 1　　若 $1 < p, \beta < \infty, s > 0$,设

$$T_{\Omega,\alpha} f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\Omega(y')\rho(y)^{-\alpha} dy$$

若$\Omega \in B_q^{0,0}$且满足$\int_{S^{n-1}} \Omega(y')J(y')d\sigma(y') = 0$，则$T_{\Omega,\alpha}$在$\dot{F}_p^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$有界。

推论 1　　设$T_{\Omega,\alpha}$如定理 1 中定义，若$\Omega \in B_q^{0,0}$且满足

$$\int_{S^{n-1}} \Omega(y')J(y')d\sigma(y') = 0$$

则$T_{\Omega,\alpha}$在$F_p^{s,\beta}(\mathbb{R}^n)$有界。

本文总共分为五章，在第 2 章中，本文会对所参考的文献进行综述，以便读者了解本文工作的总体背景以及主要技巧。在第 3 章，本文会对相关的知识和基本定义一一列出，以便参考。在第 4 章将给出一些基本的不等式，定义以及符号估计。第 5 章将利用第 4 章的结论以及插值完成定理 1 的证明。

2 文献综述

1956 年, A. P. Calderón 和 A. Zygmund[1]发表了关于奇异积分算子的理论。令$\mathbb{R}^n$为n维欧式空间，S^{n-1}表示R中的单位球面，$d\sigma = d\sigma(x')$表示S^{n-1}上的 Lebesgue 测度，其中x表示向量x方向上的单位向量。

设$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, Ω是定义在$\mathbb{R}^n$中单位球面S^{n-1}上的可积函数, 且满足Ω在S^{n-1}上的积分为零，定义f的奇异积分Tf为

$$Tf(x) := \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{\{y\in\mathbb{R}^n:|y|>\epsilon\}}\frac{\Omega(y')}{|y|^n}f(x-y)dy, \forall x \in R^n$$

其中$y' = y/|y|$。

Calderón 和 Zygmund 采用旋转法将奇异积分算子变成 Hilbert 变换，再用 Riesz 定理证明了当$\Omega \in L\log L(S^{n-1})$时，$T$在$L^p(\mathbb{R}^n)$上是有界的。并且当核 Ω 是奇函数时，条件可以减弱为$\Omega \in L^1(S^{n-1})$。

在对奇异积分算子研究的过程中，诞生一个很自然的问题——核Ω被削弱到什么程度时，奇异积分算子的$L^p, p \in (1,\infty)$有界性仍能保持。

1979 年，F. Ricci、G. Weiss[2]和 Connett[3]分别独立地证明了若$\Omega \in H^1(S^{n-1})$，T在$L^p(\mathbb{R}^n)$上是有界的。

1978 年，R. Refferman 在[4]中推广了奇异积分算子$T_{h,\Omega}$：

$$T_{\Omega,h}f(x) = p.v.\int_{R^n}f(x-y)\frac{h(|y|)\Omega(y)}{|y|}dy$$

其中$h(|y|) \in L^\infty(R^+)$。

从上面的公式可以看出，粗糙奇异积分算子核的粗糙度不仅反映在球面上，而且还反映在径向方向上。原来的旋转法也不再适用于定理的证明。因此，Refferman 利用了复插值的办法，通过复插值的方法证明了若$\Omega(y) \in Lip_\gamma(S^{n-1})$，$h \in L^\infty(R_+)$。对任意$p \in (1,\infty)$，$T_{h,\Omega}$在$L^p$上是有界的。

为了改进之前得到的结果，陆善镇，G. Weiss 和 Mitchell Taibleson 引入了 Block 空间$B_q^{k,v}(S^{n-1})$[5]。

在文献中，陆善镇证明，如果$\Omega \in B_q^{0,0}(S^{n-1})\ (q > 1)$，则算子$T_\Omega$在$L^2(\mathbb{R}^n)$上有界。随后，$T_\Omega$在$L^p, p \in (1,\infty)$的有界性也被证明[6][7]。

2004 年, Al-Qassem, Al-Salman 和 Pan[8]证明了:对于任意的$-1 <$

$\nu<0$, 在任意的p下，将条件$\Omega\in B_q^{0,\nu}(S^{n-1})$代替$\Omega\in B_q^{0,0}(S^{n-1})$，$T_\Omega$的$L^p$有界性都有可能失效。

2006 年，Ahmad Al-Salman[9]建立了在满足条件$h\in L^2(R^+,r^{-1}dr)$时，$T_{\Omega,h}$的L^p有界性，得到$\Omega\in B_q^{0,-1/2}(S^{n-1})$是有界性成立的最优条件。

在对一些更广泛的算子研究中，诞生了不同类型的奇异积分算子，对于某个椭圆微分算子：

$$D=\sum_{i,j=1}^{n}a_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j},$$

其中$\{a_{i,j}\}$为常数系数。

为了研究椭圆微分算子的存在性和一般性质，在给定其他的一些估计下，需要研究具有卷积核K的奇异积分算子T[10][11]，其中K满足：

(a) 对于任意的$\mu>0, K(\mu x_1,\dots,\mu x_n)=\mu^{-n}K(x)$;

(b) $K\in C^\infty(\mathbb{R}^n\mid\{0\})$;

(c) $\int_{S^{n-1}}K(x')d\sigma(x')=0.$

类似地，对于热算子

$$D=\frac{\partial}{\partial x_1}-\sum_{j=2}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

其对应的奇异积分算子T的核函数K满足：

(a') 对于任意的$\mu>0, K(\mu x_1,\dots,\mu x_n)=\mu^{-n}K(x)$;

(b') $K\in C^\infty(\mathbb{R}^n\mid\{0\})$;

(c') $\int_{S^{n-1}}K(x')d\sigma(x')=0.$

1966 年，为了研究更一般的常系数抛物型微分算子，Fabes 和 Riviére 定义了抛物型奇异积分算子[12]。

对于抛物型奇异积分算子，Fabes 和 Riviére 得到了$\Omega\in C^1(S^{n-1})$时，$T_{\Omega,\alpha}$在$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界性。随后，Nagel 和 Riviére 证明了$\Omega\in L\log^+L(S^{n-1})$时，$T_{\Omega,\alpha}$在$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界性[13]。陈艳萍，丁勇以及范大山在更弱的条件$\Omega\in H^1(S^{n-1})$下，证明了$T_{\Omega,\alpha}$在$L^p(\mathbb{R}^n)$上的有界性[14]。

随着对插值理论和极大不等式等工具的深入理解，数学家发现了 Triebel-Lizorkin 空间，这是对上述许多标准函数空间的推广，以 Hans Triebel 和 Petr Ivanovich Lizorkin 命名。

1991 年，Frazier. M[15]用 Littlewood-Paley 理论证明了：

(i) 当 $1 < p < \infty$ 时，$\dot{F}_p^{0,2} \sim L^p$；$0 < p \leq 1$ 时，$\dot{F}_p^{0,2} \sim H^p$；$BMO \sim \dot{F}_\infty^{0,2}$

(ii) $F_p^{s,\beta} \sim \dot{F}_p^{s,\beta} \cap L^p, \|f\|_{F_p^{s,\beta}} \sim \|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}} + \|f\|_{L^p}$

(iii) $(\dot{F}_p^{s,\beta})^* = (\dot{F}_{p'}^{s,\beta'})^*; (F_p^{s,\beta})^* = (F_{p'}^{s,\beta'})^*$

其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1; \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta'} = 1.$

关于 Triebel-Lizorkin 空间上的有界性也有很多很好的结果，陈杰诚和张纯洁[16]证明了在满足一定条件下粗糙核$\Omega(y) \in L^r(S^{n-1})(r > 1)$的奇异积分算子的$\dot{F}_p^{\beta,q}$有界性（$\beta \geq 0, 1 < p, q < \infty$）。陈艳萍和丁勇[17]证明了粗糙核$\Omega(y) \in H^1(S^{n-1})$的奇异积分算子的$\dot{F}_p^{\beta,q}$有界性$(\beta \geq 0, 1 < p, q < \infty)$。

在证明定理之前。首先说明。底空间$(\mathbb{R}^n, \rho)$是一个特殊的齐次群[18]。因此许多标准结果会被更新。例如，可以直接使用 Littlewood-Paley 理论。

其次，证明过程建立在许多前人已经完成的工作的基础上，其中包括 Stein 对于曲线上的 Littlewood 极大函数的相关不等式的工作[19]；Colzani 关于 Hardy 空间中 q-原子到∞-原子的分解方法[20][21]；范大山，潘翼彪对于符号估计的相关引理[22][23]；叶晓峰，朱相荣对于 q-block 的分解方法[24]；相关调和分析领域的基本知识与插值定理，参考了周民强先生的书籍[25]；有关于奇异积分算子的处理方法，则参考了 Palagachev 与 Softova 的工作[26]。

3 相关知识

首先给出 Blcok 空间的定义：

(i) 对于$x_0{}' \in S^{n-1}$和 $0 < \theta_0 \leq 2$，集合$B(x_0{}', \theta_0) = \{x' \in S^{n-1}: |x - x_0| < \theta_0\}$称为$S^{n-1}$上的一个 cap。

(ii) 对于 $1 < q \leq \infty$，如果可测函数b 是在某个$Q = B(x_0{}', \theta_0)$上具有支集的函数并满足$\|b\|_{L^q} \leq |I|^{-\frac{1}{q'}}$。其中$|I| = \sigma(I)$，$1/q + 1/q' = 1$。则$b$称为$S^{n-1}$上的 q-block。

(iii) $B_q^{k,v}(S^{n-1}) = \{\Omega \in L^1(S^{n-1}): \Omega = \sum_{m=1}^{\infty} C_m b_m\}$其中每个$C_m$是一个复数，每个$b_m$是一个在$Q_m$上有支集的 q-block。并且

$$\|\Omega\|_{B_q^{k,v}} = M_q^{k,v}(\{C_m\}, \{Q_m\}) = \sum_{m=1}^{\infty} |C_m|(|1 + \phi_{k,v}(|Q_m|)|) < \infty$$

其中$\phi_{k,v}(t) = \begin{cases} \int_t^1 u^{-1-k} log^v(u^{-1}) du, (0 < t < 1) \\ 0, (t \geq 1) \end{cases}$

此外，在 Block 空间的许多性质中，引用了以下与本文工作密切相关的性质:

$$B_q^{\mu,\alpha}(S^{n-1}) \subseteq B_q^{\delta,\beta}(S^{n-1}) \subseteq B_q^{0,\gamma}(S^{n-1}), (0 < \delta < \mu; \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R})$$

$$L^q(S^{n-1}) \subseteq B_q^{k,v}(S^{n-1}) \subseteq B_q^{k,\epsilon}(S^{n-1}), (v > \epsilon, \mu \in \mathbb{R})$$

其次，给出抛物型奇异积分算子的定义：

$$T_K f(x) = p.v. \int_{\mathbb{R}^n} K(y) f(x - y) dy,$$

其中K满足：

(A) 对于任意的$\mu > 0, K(\mu^{\alpha_1} x_1, \ldots, \mu^{\alpha_n} x_n) = \mu^{-\alpha} K(x_1, \ldots, x_n)$其中,$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$;

(B) $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \mid \{0\})$;

(C) $\int_{S^{n-1}} K(x') J(x') d\sigma(x') = 0.$

其中$\alpha_i \geq 1 (i = 1,2, \ldots, n)$，$J(x') = \alpha_1 x_1'^2 + \ldots \alpha_n x_n'^2$。对于任意$x \in \mathbb{R}^n$，有如下变量替换公式：

$$x_1 = \rho^{\alpha_1} \cos\varphi_1 \cdots \cos\varphi_{n-2} \cos\varphi_{n-1}$$

$$x_2 = \rho^{\alpha_2}\cos\varphi_1\cdots\cos\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = \rho^{\alpha_{n-1}}\cos\varphi_1\sin\varphi_2$$

$$x_n = \rho^{\alpha_n}\sin\varphi_1.$$

因此，$dx = \rho^{\alpha-1}J(x')d\rho d\sigma(x')$，其中$\rho^{\alpha-1}J(x')$是上述变换的 Jacobian 行列式。显然$J(x') \in C^\infty(S^{n-1}),\forall x' \in S^{n-1},\exists M$满足

$$1 \le J(x') \le M.$$

不妨假设$\alpha_n \ge \alpha_{n-1} \ge \cdots \ge \alpha_1 \ge 1$而不失一般性, 将上述条件$(A)$以矩阵的形式表达有:

(A') 对于任意的$\mu > 0, K(A_\mu x) = |\det(A_\mu)|^{-1}K(x)$

其中$A_\mu = diag[\mu^{\alpha_1},\cdots,\mu^{\alpha_n}]$是一个对角矩阵。

对于任意给定的$x \in \mathbb{R}^n$，方程

$$F(x,\rho) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{\rho^{2\alpha_i}},$$

对于$\rho > 0$严格单调递减。因此存在唯一的$\rho = \rho(x)$满足$F(x,\rho) = 1$。ρ在$\mathbb{R}^n$中是一个度量[12] 20。

在极坐标形式下，上述抛物型奇异积分算子可以表示为:

$$T_{\Omega,\alpha}f(x) = p.v.\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\Omega(y')\rho(y)^{-\alpha}dy \#(3\text{–}1)$$

其中$\Omega(y') = K(y')$，并满足

$$\int_{S^{n-1}}\Omega(y')J(y')d\sigma(y') = 0\#(3\text{–}2)$$

最后, 给出 Tribel-Lizorkin 空间的定义, 对于齐次 Tribel-Lizorkin 空间$\dot{F}_p^{s,\beta}$, 取$\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$，使其满足:

(i) $0 \le \phi(x) \le 1$

(ii) $supp(\phi) \subset \{x : \frac{1}{2} < |x| < 2\}.$

(iii) $\phi(x) > c > 0, \frac{3}{5} < |x| < \frac{5}{3}$

定义$\psi_k(x)$，使其满足$\widehat{\psi}_k(\xi) = \phi(2^k\xi)$。对于$s \in \mathbb{R}, 0 < p, \beta \le \infty (p \ne \infty), f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$

$$\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}} = \|(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |2^{-ks}\psi_k * f|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p} < \infty$$

其中$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$表示$\mathbb{R}^n$上的广义缓增函数类。若$\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}} < \infty, f \in \dot{F}_p^{s,\beta}$.

对于非齐次的 Tribel-Lizorkin 空间，用$F_p^{s,\beta}$表示。其定义为

取$\Phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$，使其满足：

(i) $supp(\hat{\Phi}) \subset \{\xi : |\xi| \le 2\}$.

(ii) 当$|x| < \frac{5}{3}$时，$\hat{\Phi}(x) > c > 0$.

$$\|f\|_{F_p^{s,\beta}} = \|(\sum_{k\ge 1}^{\infty} |2^{-ks}\psi_k * f|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p} + \|\Phi * f\|_{L^p} < \infty$$

4 定义与引理

在证明定理之前，需要完成两个基本不等式的说明。

引理 4.1 若$\psi \in S(\mathbb{R}^n)$，满足$supp(\psi) \subset \{x:\frac{1}{2} \le |\rho(x)| \le 2\}$，对于$k \in \mathbb{Z}$,定义$\mathbb{R}^n$上的乘子$S_k$，使其满足$\widehat{S_k f}(\xi) = \psi(2^k \rho(\xi))\hat{f}(\xi)$，则

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|S_k f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p} \le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|f_i|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

其中C与k,i无关，$S(\mathbb{R}^n)$表示 Schwarz 空间。

引理 4.1 是[17]中引理 2.3 的直接推论。

引理 4.2 若$\psi \in S(\mathbb{R}^n)$，满足$supp(\psi) \subset \{x:\frac{1}{2} \le |\rho(x)| \le 2\}$，对于$k \in \mathbb{Z}$。定义$L_r x = (r^2 x_1, r x_2, \cdots, r x_n), (r > 0, x \in \mathbb{R}^n)$。定义$\mathbb{R}^n$上的乘子$S_{k,r}$，使其满足$\widehat{S_{k,r} f}(\xi) = \psi(2^k \rho(L_r x))\hat{f}(\xi)$，则

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|S_{k,r} f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p} \le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|f_i|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

其中C与k,i,r无关。

证明 定义Υ和Δ满足，$\hat{\Upsilon}(\xi) = \psi(\rho(L_r\xi))$，$\hat{\Delta}(\xi) = \psi(\rho(\xi))$。对给定的$k \in \mathbb{Z}$。记$\Upsilon_k(x) = 2^{-k\alpha}\Upsilon(A_{2^{-k}}x)$，$\Delta_k(x) = 2^{-k\alpha}\Delta(A_{2^{-k}}x)$。

$$\hat{\Upsilon}_k(\xi) = 2^{-k\alpha}\widehat{\Upsilon(A_{2^{-k}}\cdot)}(\xi) = \frac{2^{-k\alpha}}{|2^{-k}|^{\alpha}}\hat{\Upsilon}(A_{2^k}\xi) = \psi(2^k\rho(L_r\xi))$$

$$\hat{\Delta}_k(\xi) = 2^{-k\alpha}\widehat{\Delta(A_{2^{-k}}\cdot)}(\xi) = \psi(2^k\rho(\xi))$$

$$\widehat{\Upsilon_k(L_{1/r}\cdot)}(\xi) = 2^{-k\alpha}\widehat{\Delta(A_{2^{-k}}\cdot)}(\xi)$$

$$\Upsilon_k(x) = (\frac{1}{r^{n+1}})2^{-k\alpha}\Delta(L_{\frac{1}{r}}A_{2^{-k}}x)$$

$$S_{k,r}f(x) = \Upsilon_k(x) * f(x)$$

由Υ_k的定义，对于任意$i \in \mathbb{Z}$，

$$\begin{aligned}\Upsilon_k(x) * f_j(x) &= \frac{1}{r^{n+1}}2^{-k\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta(L_{\frac{1}{r}}A_{2^{-k}}y)f_i(x-y)dy \\ &= 2^{-k\alpha}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta(A_{2^{-k}}y)f_i(L_r(L_{\frac{1}{r}}x-y))dy \\ &= \Delta_k * U_i(L_{1/r}x)\end{aligned}$$

其中$U_i = f_i(L_r x)$。由引理 4.1，可以得到

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|S_{k,r}f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p} = \{\int_{\mathbb{R}^n}(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\Delta_k * U_i(L_{\frac{1}{r}}x)|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{p}{\beta}}dx\}^{\frac{1}{p}}$$

$$= r^{\frac{n+1}{p}}\{\int_{\mathbb{R}^n}(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|U_i(x)|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{p}{\beta}}dx\}^{\frac{1}{p}}$$

$$\le Cr^{\frac{n+1}{p}}\{\int_{\mathbb{R}^n}(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|U_i(x)|^{\beta})^{\frac{p}{\beta}}dx\}^{\frac{1}{p}} = C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|f_i|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

其中C与k,i,r无关。

为了通过插值来完成之后的工作，需要借助极大算子，关于其不等式的证明将分为两步，由曲线上过渡至椭圆面。

若$\Omega\in L^1(S^{n-1})$, 下面给出一个关于粗糙核极大算子M_Ω向量模不等式，其中M_Ω的定义如下

$$M_\Omega f(x) = \sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{\alpha}}\int_{\|y\|_A<\rho}|\Omega(y)||f(x-y)|dy.$$

引理 4.3 [19]令 $1<p,\beta<\infty$，$u\in S^{n-1}$，则存在一个与$\Gamma(t)$和f_i无关的正常数C使得

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|M_{\Gamma(t)}f_i|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p} \le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|f_i|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

其中$M_t f(x)$是曲线$\Gamma(t)$上的方向 Hardy-Littlewood 极大函数。$\{\lambda_i\}$、$\{\beta_i\}$是一列固定实数$\Gamma(t) = (\lambda_1 t^{\alpha_1},\cdots,\lambda_n t^{\alpha_n})$

$$M_{\Gamma(t)}f(x) = \sup_{h>0}\frac{1}{2\rho}\int_{-\rho}^{\rho}|f(x-A_t y')|dt$$

引理 4.4 令 $1<p,\beta<\infty$，$f\in L^p(l^{\beta}),\Omega\in L^1(S^{n-1})$则

$$\|M_\Omega f(x)\|_{L^p} \le C\|\Omega\|_1\|M_{\Gamma(t)}f(x)\|_{L^p}$$

其中C与$\Gamma(t)$无关

证明

$$\|M_\Omega f(x)\|_{L^p} = \|\sup_{\rho>0}\frac{1}{\rho^{\alpha}}\int_{\|y\|_A<\rho}|\Omega(y)||f(x-y)|dy\|_{L^p}$$

$$\le \|\sup_{\rho>0}\int_{S^{n-1}}J(y')|\Omega(y')|\frac{1}{\rho}\int_{-\rho}^{\rho}|f(x-A_t y')|dtd\sigma(y')\|_{L^p}$$

$$\le C\|\int_{S^{n-1}}|\Omega(y')|\sup_{\rho>0}\frac{1}{2\rho}(\int_{-\rho}^{\rho}|f(x-A_t y')|dt)d\sigma(y')\|_{L^p}$$

$$\le C\|\Omega\|_1\|M_{\Gamma(t)}f(x)\|_{L^p}$$

引理 4.5 令 $1<p,\beta<\infty$，$f_j\in L^p(l^\beta)$，$\Omega\in L^1(S^{n-1})$则

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|M_\Omega f_i|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\le C\|\Omega\|_1\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|f_i|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

证明

$$M_\Omega f_i(x)\le C\int_{S^{n-1}}|\Omega(y')|\sup_{\rho>0}\frac{1}{2\rho}\left(\int_{-\rho}^{\rho}|f(x-A_ty')|\,dt\right)d\sigma(y')$$
$$=C\|\Omega\|_1\int_{S^{n-1}}M_{\Gamma(t)}f_i(x)\,d\sigma(y')$$

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|M_\Omega f_i|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}=\sup_{\|\{g_i\}\|_{L^{p'}(l^{\beta'})}\le 1}|\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}M_\Omega f_i(x)g_i(x)\,dx|$$

$$\le C\|\Omega\|_1\sup_{\|\{g_i\}\|_{L^{p'}(l^{\beta'})}\le 1}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{S^{n-1}}|M_{\Gamma(t)}f_i(x)|d\sigma(y')|g_i(x)|dx$$

$$=C\|\Omega\|_1\sup_{\|\{g_i\}\|_{L^{p'}(l^{\beta'})}\le 1}\int_{S^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i\in\mathbb{Z}}|M_{\Gamma(t)}f_i(x)|\,|g_i(x)|dx\,d\sigma(y')$$

$$\le C\|\Omega\|_1\sup_{\|\{g_i\}\|_{L^{p'}(l^{\beta'})}\le 1}\int_{S^{n-1}}\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|M_{\Gamma(t)}f_i|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|g_i|^{\beta'})^{\frac{1}{\beta'}}\|_{L^{p'}}d\sigma(y')$$

$$\le C\|\Omega\|_1\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|f_i|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

下面将对 q-原子和∞-原子给出定义，我们将在后文中对 q-blcok 进行两部分解，使其被表述为∞-原子的和的形式。

定义 4.1 球面上的函数$a(x)$，如果存在$\xi\in S^{n-1}$和$\rho\in(0,1]$满足：

(i) $supp(a)\subset S^{n-1}\cap\{y\in\mathbb{R}^n:|y-\zeta|<\rho;\zeta\in S^{n-1},\rho\in(0,1]\}$

(ii) $\|a\|_{L^q(S^{n-1})}\le|B(\xi,\rho)|^{-1/q'}$

(iii) $\int_{S^{n-1}}a(y')d\sigma(y')=0$

则称a是一个 q-原子。

定义 4.2 球面上的函数$a(x)$，如果存在$\xi\in S^{n-1}$和$\rho\in(0,1]$满足：

(i) $supp(a)\subset S^{n-1}\cap\{y\in\mathbb{R}^n:|y-\zeta|<\rho;\zeta\in S^{n-1},\rho\in(0,1]\}$

(ii) $\|a\|_{L^\infty(S^{n-1})}\le\rho^{1-n}$

(iii) $\int_{S^{n-1}}a(y')d\sigma(y')=0$

则称a是一个∞-原子。

由$\Omega\in B_q^{0,0}(S^{n-1})$，可以对$\Omega$进行$block$分解

$$\Omega(y') = \sum_m C_m b_m(y')$$

其中每一个b_m都是一个$q-block$，满足

$$supp\,(b_m) \subset Q_m$$

其中$Q_m = S^{n-1} \cap \{y \in \mathbb{R}^n: |y-\zeta| < \rho; \zeta \in S^{n-1}, \rho \in (0,1]\}$。

不妨假设所有b_m足够小，使得$|Q_m| < 1$。

$$\phi_{0,0}(|Q_m|) = \chi_{(0,1)}(t)\, log^+(\frac{1}{t})$$

$$M_q^{0,0} := \sum_{m=1}^{\infty} |C_m|\,(1 + log\,(\frac{1}{|Q_m|})) < \infty$$

令$\bar{b}_m = \frac{1}{|Q_m|}\int_{Q_m} b_m(y)dy, \dot{b}_m(y) = b_m(y) - \chi_{Q_m}(y)\bar{b}_j$。容易得到：

$$supp\,\dot{b}_m \subset Q_m \#(4-1)$$

$$\int_{Q_m} \dot{b}_m(y)d\sigma(y) = \int_{Q_m}(b_m(y) - \bar{b}_m)\,d\sigma(y) = 0 \#(4-2)$$

$$\bar{b}_m \le \frac{1}{|Q_m|}$$

$$\|\dot{b}_m\|_{L^q} \le \|b_m\|_{L^q} + \|\chi_{Q_m}(y)\bar{b}_m\|_{L^q} \le 2|Q_m|^{-\frac{1}{q'}} \#(4-3)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |C_m| < M_q^{0,0}$$

$$\Omega(y') = \sum_m C_m b_m(y') = \sum_{m\in\mathbb{Z}} C_m \dot{b}_m(y') + \sum_{m\in\mathbb{Z}} C_m \chi_{Q_m}(y)\bar{b}_j$$

由 Jensen 不等式

$$\begin{aligned}\|C_m\chi_{Q_m}(y)\bar{b}_j\|_{Llog^+L(S^{n-1})} &\le \sum_{m\in\mathbb{Z}} |C_m|\,\|\chi_{Q_m}(y)\bar{b}_j\|_{Llog^+L(S^{n-1})} \\ &\le C\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{Q_m} |C_m|\,|\bar{b}_j|\log(1+\bar{b}_j) \\ &\le C M_q^{0,0} \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{Q_m} \log(1+\frac{1}{|Q_m|}) \le \infty \#(4-4)\end{aligned}$$

定义$\dot{\Omega}(y') = \sum_{m\in\mathbb{Z}} C_m \dot{b}_m(y')$; $\bar{\Omega}(y') = \sum_{m\in\mathbb{Z}} C_m \chi_{Q_m}(y)\bar{b}_j$。由式(4-4)知$\bar{\Omega}(y') \in Llog^+L\,(S^{n-1})$。由于$\dot{b}_m(y')$满足条件(4-1), (4-2), (4-3), $\dot{b}_m(y')$是一个$q-$原子。由[21], 根据条件(3.2), $\dot{b}_m(y') = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda_{m,n} a_{m,n}(y')$。其中$a_{m,n}$是一个$\infty-$原子。根据下面两个引理，我们可以用分解后的$\infty-$原子

完成符号估计。

引理 4.6[22] 假设$n \geq 3$，并且a满足

$$supp(a) \subset S^{n-1} \cap \{y \in \mathbb{R}^n : |y-\zeta| < \rho; \zeta \in S^{n-1}, \rho \in (0,1]\} \#(4-5)$$

$$\int_{S^{n-1}} a(y') d\sigma(y') = 0 \#(4-6)$$

$$\|a\|_{L^\infty(S^{n-1})} \leq \rho^{1-n}. \#(4-7)$$

并定义

$$F_a(s) = (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} \chi_{(-1,1)}(s) \int_{S^{n-2}} a\left(s, (1-s^2)^{\frac{1}{2}} \tilde{y}\right) d\sigma(\tilde{y}),$$

$$G_a(s) = (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} \chi_{(-1,1)}(s) \int_{S^{n-2}} \left|a\left(s, (1-s^2)^{\frac{1}{2}} \tilde{y}\right)\right| d\sigma(\tilde{y}),$$

则存在一个与a无关的常数C使得

$$supp(F_a) \subset (\xi'_1 - 2r(\xi'), \xi'_1 + 2r(\xi')); \#(4\text{-}8)$$

$$supp(G_a) \subset (\xi'_1 - 2r(\xi'), \xi'_1 + 2r(\xi')); \#(4-9)$$

$$\|F_a\|_\infty \leq \frac{C}{r(\xi')}; \|G_a\|_\infty \leq \frac{C}{r(\xi')}; \#(4-10)$$

$$\int_{\mathbb{R}} F_a(s) ds = 0, \#(4-11)$$

其中$r(\xi') = |\xi|^{-1}|L_r\xi|$, $\tilde{y} = (y_2, y_3, \ldots, y_n)$。

引理 4.7[22] 假设$n = 2$，并且a满足式(4-5)，式(4-6)，式(4-7)，并定义

$$F_a(s) = (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} \chi_{(-1,1)}(s) \left(a\left(s, (1-s^2)^{\frac{1}{2}}\right) + a\left(s, -(1-s^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right),$$

$$G_a(s) = (1-s^2)^{\frac{n-3}{2}} \chi_{(-1,1)}(s) \left(\left|a\left(s, (1-s^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right| + \left|a\left(s, -(1-s^2)^{\frac{1}{2}}\right)\right|\right),$$

则存在一个与a无关的常数C使得$F_a(s)$满足式(4-8)，式(4-11)并且

$$\|F_a\|_q \leq C|L_r(\xi')|^{-1+\frac{1}{q}},$$

G_a满足式(4-9)并且存在$q \in (1,2)$

$$\|G_a\|_q \leq C|L_r(\xi')|^{-1+\frac{1}{q}},$$

引理 4.8 定义$\sigma_{k,m,n}(y') = \frac{a_{m,n}(y')}{\rho^\alpha} \chi_{\{2^k < |\rho| \leq 2^{k+1}\}}$，则

$$|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)| \leq C\,|L_r A_{2^k} \xi|$$

证明 只需要对$n \geq 3$的情况作出表述，对于$n = 2$的情况，只需要用引理 4.7 代替证明中的引理 4.6 即可。

$$\sigma_{k,m,n}(y') = \int_{2^k}^{2^{k+1}} \int_{S^{n-1}} J(y') a_{m,n}(y') e^{-2\pi i A_\rho y' \cdot \xi} d\sigma(y') \frac{d\rho}{\rho}$$

对于任意$\xi \neq 0$，选择一个旋转$\mathcal{O}$使得$\mathcal{O}(A_\rho \xi) = |A_\rho \xi| \iota = |A_\rho \xi|(1,0,\cdots,0)$.令$y' = (s, y_2', y_3', \cdots, y_n')$

$$\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi) = \int_{2^k < |\rho| \le 2^{k+1}} \int_{S^{n-1}} a_{m,n}(\mathcal{O}^{-1}(y')) e^{-2\pi i |A_\rho \xi| (\iota \cdot y')} d\sigma(y') \frac{d\rho}{\rho}$$

容易验证$a_{m,n}(\mathcal{O}^{-1}(y'))$满足条件式(4－6)，式(4－7)。并且有$supp(a_{m,n}) \subset B(\zeta, r) \cap S^{n-1}$，其中$\zeta = A_\rho \xi / |A_\rho \xi|$。可以得到

$$\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi) = \int_{2^k}^{2^{k+1}} \int_{\mathbb{R}} F_a(s) e^{-2\pi i |A_\rho \xi| s} ds \frac{d\rho}{\rho},$$

其中$F_a(s)$是引理4.6中定义的方程。由引理4.6, 得到$supp(F_a) \subset (-2r(\zeta) + \zeta_1, 2r(\zeta) + \zeta_1)$。其中$\zeta_1 = \rho_1^\alpha \xi_1 / |A_\rho \xi|$。

定义$N(s) = r(\zeta) F_a(r(\zeta)s)$，$N$是一个满足下列条件的函数,

$$supp(N) \subset (-2 + \zeta_1 / r(\zeta), 2 + \zeta_1 / r(\zeta))$$
$$\|N\|_\infty < C$$

其中C与s, ρ无关。

通过换元得到

$$\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi) = \int_{2^k}^{2^{k+1}} \int_{\mathbb{R}} N(s) e^{-2\pi i |L_r A_\rho \xi| s} ds \frac{d\rho}{\rho}$$

通过$N(s)$满足消失性条件,

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi) &\le \int_{2^k}^{2^{k+1}} \left| \int_{\mathbb{R}} N(s) \left(e^{-2\pi i |L_r A_\rho \xi| s} - e^{-2\pi i \rho^{\alpha_1} s}\right) ds \right| \frac{d\rho}{\rho} \\
&\le C \int_{2^k}^{2^{k+1}} \int_{|s - \frac{\zeta_1}{r(\zeta)}| \le 2} N(s) |L_r A_\rho \xi| \left| s - \frac{\zeta_1}{r(\zeta)} \right| ds \frac{d\rho}{\rho} \\
&\le C \int_1^2 |L_r A_{2^k \rho} \xi| \frac{d\rho}{\rho} \le C |L_r A_{2^k} \xi|
\end{aligned}$$

引理 4.9 定义$\sigma_{k,m,n}(y')$同上,

$$|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)| \le C |L_r A_{2^k} \xi|^{\frac{1}{\log|Q_m|}}$$

证明 令$p_m = \log|Q_m| / \{1 + \log|Q_m|\}$，则$p_m > 1$。

由 Hölder 不等式,

$$|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)|^2 \le C \int_{2^k}^{2^{k+1}} \left| \int_{S^{n-1}} a_{m,n}(y') e^{-2\pi i A_\rho y' \cdot \xi} d\sigma(y') \right|^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

$$|\int_{S^{n-1}} a_{m,n}(y')e^{-2\pi i A_\rho y'\cdot\xi}d\sigma(y')|^2$$
$$=\iint_{S^{n-1}\times S^{n-1}} a_{m,n}(y')\bar{a}_{m,n}(x')e^{-2\pi i A_\rho(y'-x')\cdot\xi}\, d\sigma(y')d\sigma(x')$$

对于任意$\omega\in[0,1]$,

$$|\int_{2^k}^{2^{k+1}} e^{-2\pi i A_\rho(y'-x')\cdot\xi}\frac{d\rho}{\rho}|\le C(|(y'-x')/\cdot A_{2^k}\xi|)^{-\frac{1}{\omega}}$$

对于任意$\xi\neq 0$，选择一个旋转$\mathcal{O}$使得$\mathcal{O}(A_{2^k}\xi)=|A_{2^k}\xi|\iota=|A_{2^k}\xi|(1,0,\cdots,0)$.令$y'=(s,y_2',y_3',\cdots,y_n')$，$x'=(t,x_2',x_3',\cdots,x_n')$。容易验证$a_{m,n}(\mathcal{O}^{-1}(y'))$满足条件式(4−6)，式(4−7)。并且有$supp\,(a_{m,n})\subset B(v,r)\cap S^{n-1}$，其中$v=A_{2^k}\xi/|A_{2^k}\xi|$。令$\omega=\frac{1}{p_m'}$，可以得到

$$\begin{aligned}|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)|&\le C\iint_{S^{n-1}\times S^{n-1}}|a_{m,n}(y')||a_{m,n}(x')|(|(y'-x')\\&\cdot A_{2^k}\xi|)^{-\frac{1}{p_m'}}d\sigma(y')d\sigma(x')\\&=C\iint_{S^{n-1}\times S^{n-1}}|a_{m,n}(\mathcal{O}^{-1}(y'))||a_{m,n}(\mathcal{O}^{-1}(x'))|\\&\times(|(y'-x')\cdot A_{2^k}\xi/\iota/|)^{-\frac{1}{p_m'}}d\sigma(y')d\sigma(x')\end{aligned}$$

由 Hölder 不等式

$$\begin{aligned}|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)|&\le C|L_rA_{2^k}\xi|^{-\frac{1}{p_m'}}\|a_{m,n}\|_{L^{p_m}(S^{n-1})}\\&\times\{\iint_{S^{n-1}\times S^{n-1}}(|(y'-x')\cdot/\iota/|)^{-1}d\sigma(y')d\sigma(x')\}^{\frac{1}{p_m'}}\end{aligned}$$

$$\|a_{m,n}\|_{L^{p_m}(S^{n-1})}\le C\|a_{m,n}\|_{L^q(S^{n-1})}|Q_m|^{\frac{1}{p_m}-\frac{1}{q}}\le C|Q_m|^{\frac{1}{p_m}-1}=C|Q_m|^{\frac{1}{\log|Q_m|}}\le C$$

$$|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)|\le C|L_rA_{2^k}\xi|^{-\frac{1}{p_m'}}=|L_rA_{2^k}\xi|^{\frac{1}{\log|Q_m|}}$$

完成了符号估计之后，可以对最后一个需要的不等式进行证明。

引理 4.10 令 $1<p,q<\infty$，$\{(\sum_k|g_{k,i}|^2)^{\frac{1}{2}}\}_i\in L^p(l^q)$，$\Omega\in L^1(S^{n-1})$ 则

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*g_{k,i}|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_{k,i}|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

证明 显然

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*g_{k,i}|\le M_{a_{m,n}}(\sup_{k\in\mathbb{Z}}/g_{k,i}/)$$

结合引理 4.5

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*g_{k,i}|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\le\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(M_{a_{\mathrm{m,n}}}(\sup_{k\in\mathbb{Z}}|g_{k,i}|))^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$\le C\|a_{\mathrm{m,n}}\|_{l}\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sup_{k\in\mathbb{Z}}|g_{k,i}|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

另一方面，存在函数列$\{h_j\}\in L^{p'}(l^{\beta'})$使得

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*g_{k,i}|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$\le|\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*g_{k,i}|(x)h_i(x)dx|$$

$$\le|\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_{k,i}(x)|\sup_{k\in\mathbb{Z}}|\tilde{\sigma}_{k,m,n}|*|h_i|(x)dx|$$

$$\le C\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_{k,i}(x)||M_{\tilde{a}_{\mathrm{m,n}}}h_i(x)|dx$$

其中$\tilde{\sigma}_{k,m,n}(x)=\tilde{\sigma}_{k,m,n}(-x);\tilde{a}_{\mathrm{m,n}}(x)=\tilde{a}_{\mathrm{m,n}}(-x)$

由 Hölder 不等式以及引理 4.5

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*g_{k,i}|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_{k,i}(x)|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|M_{\tilde{a}_{\mathrm{m,n}}}h_i(x)|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$\le C\|a_{\mathrm{m,n}}\|_{l}\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_{k,i}(x)|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|h_i(x)|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_{k,i}(x)|)^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

通过上述两式插值可以得到

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*g_{k,i}|^{2})^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|g_{k,i}|^{2})^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

5 定理 1 证明

注意到

$$T_{\Omega,\alpha}f(x)=\int_0^\infty\int_{S^{n-1}}\Omega(y')J(y')f(x-A_\rho y')\,d\sigma(y')\frac{d\rho}{\rho}$$

要证明定理 1，即

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}\le\|f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}\#(5-1)$$

$$\|T_{\Omega,\alpha}f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}=\|T_{\dot\Omega,\alpha}f+T_{\bar\Omega,\alpha}f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}\le\|T_{\dot\Omega,\alpha}f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}+\|T_{\bar\Omega,\alpha}f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}$$

已知$\|T_{\bar\Omega,\alpha}f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}\le C\|f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}$，要证式(5-1)，只需要证明:

$$\|T_{\dot\Omega,\alpha}f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}\le C\|f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}\#(5-2)$$

本文将通过插值来完成式(5-2)的证明，由引理 4.2 中乘子$S_{k,r}$的定义，

$$\begin{aligned}T_{\dot\Omega,\alpha}f(x)&=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\sigma_k*\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}S_{j+k,r}(S_{j+k,r}f)\right)\\&=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}S_{j+k,r}(\sigma_k*S_{j+k,r}f)\end{aligned}$$

$$T_{\dot\Omega,\alpha}f(x)\coloneqq\sum_{j\in\mathbb{Z}}I_jf$$

$$I_{j,m,n}f:=\sum_{k\in\mathbb{Z}}S_{j+k,r}(\sigma_{k,m,n}*S_{j+k,r}f)$$

$$I_jf=\sum_{m\in\mathbb{Z}}C_m\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_nI_{j,m,n}f$$

用$S^*_{j+k,r}$表示$S_{j+k,r}$的对偶算子

首先需要证明

$$\|I_{j,m,n}f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}\le C\|f\|_{\dot F_p^{s,\beta}}\#(5-3)$$

容易看出式(5-3)是式(5-4)的直接推论

$$\left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|I_{j,m,n}f_i|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\|_{L^p}\le C\left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|f_i|^\beta\right)^{\frac{1}{\beta}}\right\|_{L^p}\#(5-4)$$

$$\|I_{j,m,n}f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}=\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}2^{-is\beta}|\Psi_i*I_{j,m,n}f|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$=\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|I_{j,m}2^{-is}\Psi_i*f|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}2^{-is\beta}|\Psi_i*I_{j,m,n}f|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}=C\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}$$

证明式(5-4)将分为式(5-5)、式(5-6)两个步骤

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|I_{j,m,n}f_i|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*S_{j+k,r}f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\#(5\text{-}5)$$

由引理 4.2 和 Hölder 不等式

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|I_{j,m,n}f_i|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$=\sup_{\|\{g_i\}\|_{L^{p'}(l^{\beta'})}\le 1}|\sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle\sigma_{k,m,n}*S_{j+k,r}f_i,S_{j+k,r}^*g_i\rangle|$$

$$\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*S_{j+k,r}f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\sup_{\|\{g_i\}\|_{L^{p'}(l^{\beta'})}\le 1}\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|S_{j+k,r}^*g_i|^2)^{\frac{\beta'}{2}})^{\frac{1}{\beta'}}\|_{L^{p'}}$$

$$\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*S_{j+k,r}f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\sup_{\|\{g_i\}\|_{L^{p'}(l^{\beta'})}\le 1}\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|g_i|^{\beta'})^{\frac{1}{\beta'}}\|_{L^{p'}}$$

$$\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*S_{j+k,r}f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

再证明

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*S_{j+k,r}f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(|f_i|^{\beta}))^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}\#(5\text{-}6)$$

由引理 4.10、引理 4.2

$$\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\sigma_{k,m,n}*S_{j+k,r}f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$\le C\|a_{m,n}\|_{L^1(S^{n-1})}\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|S_{j+k,r}f_i|^2)^{\frac{\beta}{2}})^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

$$\le C\|(\sum_{i\in\mathbb{Z}}(|f_i|^{\beta}))^{\frac{1}{\beta}}\|_{L^p}$$

令$h\in L^{\infty}(0,\infty)$。$q>1$，$b_m$是一个支集在$Q_m$上的$q-block$。根据引理 4.8 与引理 4.9，不妨假设$|Q_m|<e^{\frac{q}{1-q}}$。

$j<0$，根据引理 4.9 估计

$$|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)|\le C|L_rA_{2^k}\xi|^{\frac{1}{\log|Q_m|}}$$

$$\|I_{j,m,n}f\|_2^2\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^{-j-k-1}\le\rho(L_r\xi)\le 2^{-j-k+1}}|\hat{f}(\xi)|^2|\hat{\sigma}_{k.m,n}(\xi)|^2d\xi$$

$$\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^{-j-k-1}\le\rho(L_r\xi)\le 2^{-j-k+1}}|\hat{f}(\xi)|^2|L_rA_{2^k}\xi|^{\frac{2}{\log|Q_m|}}d\xi$$

$$=\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^{-j-k-1}}^{2^{-j-k+1}}\int_{S^{n-1}}J(\xi')|\hat{f}(L_{\frac{1}{r}}A_\rho\xi')|^2|A_{2^k}A_\rho\xi'|^{\frac{2}{\log|Q_m|}}\rho^{\alpha-1}d\sigma(\xi')d\rho$$

$$\le C2^{\frac{-2\alpha_1 j}{\log|Q_m|}}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^{-j-k-1}}^{2^{-j-k+1}}\int_{S^{n-1}}J(\xi')|\hat{f}(L_{\frac{1}{r}}A_\rho\xi')|^2\rho^{\alpha-1}d\sigma(\xi')d\rho$$

$$\le C2^{\frac{-2j}{\log|Q_m|}}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(L_{\frac{1}{r}}\xi)|^2d\xi=C2^{\frac{-2j}{\log|Q_m|}}\|f\|_2^2$$

$$\|I_{j,m,n}f\|_{\dot{F}_2^{0,2}}\le C2^{-\frac{j}{\log|Q_m|}}\|f\|_{\dot{F}_2^{0,2}}\#(5\text{-}7)$$

$j\ge 0$ 由引理 4.8，$|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)|\le C|L_rA_{2^k}\xi|$

$$\|I_{j,m,n}f\|_2^2\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^{-j-k-1}\le\rho(L_r\xi)\le 2^{-j-k+1}}|\hat{f}(\xi)|^2|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)|^2d\xi$$

$$\le C\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^{-j-k-1}\le\rho(L_r\xi)\le 2^{-j-k+1}}|L_rA_{2^k}\xi|^2|\hat{\sigma}_{k,m,n}(\xi)|^2d\xi$$

$$=\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^{-j-k-1}}^{2^{-j-k+1}}\int_{S^{n-1}}J(\xi')|\hat{f}(L_{\frac{1}{r}}A_\rho\xi')|^2|A_{2^k}A_\rho\xi'|\rho^{\alpha-1}d\sigma(\xi')d\rho$$

$$\le C2^{-2\alpha_1 j}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{2^{-j-k-1}}^{2^{-j-k+1}}\int_{S^{n-1}}J(\xi')|\hat{f}(L_{\frac{1}{r}}A_\rho\xi')|^2\rho^{\alpha-1}d\sigma(\xi')d\rho$$

$$\le C2^{-2j}\frac{1}{r^{n+1}}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat{f}(L_{\frac{1}{r}}\xi)|^2d\xi=C2^{-2j}\|f\|_2^2$$

$$\|I_{j,m,n}f\|_2\le C2^{-j}\|f\|_2\#(5\text{-}8)$$

对任意给定的 $1<p,\beta<\infty,s\in\mathbb{R}$。存在 $1<p_0,\beta_0<\infty,s_0\in R,\theta\in(0,1)$，满足：

$$\frac{1}{p}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{p_0},\ \frac{1}{\beta}=\frac{\theta}{2}+\frac{1-\theta}{\beta_0},\ s=(1-\theta)s_0$$

通过式(5-3)和式(5-7)插值得到，$j<0$，存在$\mu>0$，满足

$$\|I_{j,m,n}f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\le C2^{-\frac{j\mu}{\log|Q_m|}}\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\#(5\text{-}9)$$

式(5-3)和式(5-8)插值得到，$j>0$时，存在$\delta>0$，满足

$$\|I_{j,m,n}f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\le C2^{-\delta j}\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\#(5-10)$$

$$\|T_{\dot{\Omega},\alpha}f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}=\|\sum_{j<0}I_jf+\sum_{j>0}I_jf\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\le\|\sum_{j<0}I_jf\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}+\|\sum_{j>0}I_jf\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}$$

$$\begin{aligned}\|\sum_{j<0}I_jf\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}&\le\sum_{j<0}\|I_jf\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\le\sum_{j<0}\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}C_m\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_{m,n}I_{j,m,n}f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\\&\le C\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\lambda_{m,n}|\sum_{j<0}\sum_{m}|C_m|2^{-\frac{j\mu}{\log|Q_m|}}\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\\&\le C\|\Omega\|_{H^1}\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\sum_m|C_m|(\log\frac{1}{|Q_m|})\le CM_q^{0,0}\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\\&=C\|f\|_{F_p^{s,\beta}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\sum_{j>0}I_jf\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}&\le\sum_{j>0}\|\sum_{m\in\mathbb{Z}}C_m\sum_{n\in\mathbb{Z}}\lambda_{m,n}I_{j,m,n}f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\\&\le C\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\lambda_{m,n}|\sum_{j<0}\sum_{m}|C_m|2^{-j\delta}\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\le C\|\Omega\|_{H^1}M_q^{0,0}\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}\\&=C\|f\|_{F_p^{s,\beta}}\end{aligned}$$

综上式(5-2)得证，式(5-1)随之被证明，定理 1 得证。

对于推论 1，结合[14]中的结果和[24]中关于H^1与$B_q^{0,0}$的关系研究。得到

$$B_q^{0,0}\subset H^1,\|T_\Omega f\|_{L^p}\le C\|f\|_{L^p}\#(5-11)$$

根据非齐次 Triebel – Lizorkin 的性质$\|f\|_{F_p^{s,\beta}}\sim\|f\|_{\dot{F}_p^{s,\beta}}+\|f\|_{L^p}$得到

$\|T_\Omega f\|_{F_p^{s,\beta}}\le C\|f\|_{F_p^{s,\beta}}$，推论 1 得证。

6 结　论

本文通过对$B_q^{0,0}$进行原子分解，将问题转化为满足一定尺寸条件的原子的符号估计。在符号估计的方法上，本文采用了两种方法，其一是通过 Block 空间本身的分解大小控制，来实现原子的尺寸控制。其二则是利用$B_q^{0,0}$是H^1的真子空间，将 q-block 进一步分解成$\infty-$原子。之后通过引理 2.1 及引理 2.2 等不等式的证明和插值定理，得到$B_q^{0,0}$核的抛物型粗糙核奇异积分算子在 Triebel-Lizorkin 空间的有界性。

最后，本文的底空间是一个特殊的齐次群，既然 Hardy 空间可以定义在一般的齐次群上而具有很多好的性质。一个自然的问题由此诞生——如果底空间是一般的齐次群的情况下, 此时具有的H^1核粗糙核奇异积分算子是否仍然有界?

参考文献

[1] Calderón A P, Zygmund A. On singular integrals[J]. American Journal of Mathematics, 1956, 78(2): 289-309.

[2] Ricci F, Weiss G. A characterization of H^1 (Σ_ {n-1})[J]. Harmonic Analysis in Euclidean Spaces. 1979: 289-294.

[3] Connett W C. Singular integrals near L^ 1[J]. Proceedings of Symposium. 1979: 163-165.

[4] Fefferman R. A note on singular integrals[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1979, 74(2): 266-270.

[5] 陆善镇. 由块生成的空间[M]. 北京：北京师范大学出版社，1989.

[6] Al-Hasan A, Fan D. A singular integral operator related to block spaces[J]. Hokkaido Mathematical Journal, 1999, 28(2): 285-299.

[7] Al-Qassem H, Pan Y. Lp estimates for singular integrals with kernels belonging to certain block spaces[J]. Revista Matemática Iberoamericana, 2002, 18(3): 701-730.

[8] Al-Qassem H, Al-Salman A, Pan Y. Singular integrals associated to homogeneous mappings with rough kernels[J]. Hokkaido Mathematical Journal, 2004, 33(2004):551-569.

[9] Al-Salman A J. On a class of singular integral operators with rough kernels[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2006, 49(1): 3-10.

[10] Calderón A P, Zygmund A. On the Existence of Certain Singular Integrals[J]. Springer Netherlands, 1989, 88(1):85-139.

[11] Calderón A P, Zygmund A. Singular Integral Operators and Differential Equations[J]. American Journal of Mathematics, 1957, 79(4):901-921.

[12] Fabes E B, Riviere N M. Singular integrals with mixed homogeneity[J]. Studia Mathematica, 1966, 27(1):19-38.

[13] Nagel A, Riviere N M, Wainger S. On Hilbert Transforms Along Curves. II[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1974, 80(1974).

[14] Chen Y, Ding Y, Fan D. A parabolic singular integral operator with rough kernel[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2008, 84(2):163-179.

[15] Frazier M, Frazier M W, Jawerth B, et al. Littlewood-Paley theory and the study of function spaces[M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1991.

[16] Chen J, Zhang C. Boundedness of rough singular integral operators on the Triebel–Lizorkin spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 337(2): 1048-1052

[17] Chen Y, Ding Y. Rough singular integrals on Triebel–Lizorkin space and Besov space[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 347(2): 493-501

[18] Folland G B, Stein E M. Hardy Spaces on Homogeneous Groups[M]. Princeton: Princeton University Press, 1982.

[19] Stein E M. Maximal functions: Homogeneous curves[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1976, 73(7):2176-2177.

[20] Colzani L, Taibleson M H, Weiss G. Maximal estimates for Cesàro and Riesz means on sphere[J]. Revista panamericana de salud pú blica = Pan American Journal of Public Health, 1984, 18(6):381-387.

[21] Colzani L. Hardy spaces on unit spheres[J]. Bollettino Della Unione Matematica Italiana, 1985(1):219-244.

[22] Fan D, Pan Y. Oscillatory integrals and atoms on the unit sphere[J]. Manuscripta Mathematica, 1996, 89(1):179-192.

[23] Fan D, Pan Y. A singular integral operator with rough kernel[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1997, 125(12).

[24] Ye X, Zhu X. A Note on Certain Block Spaces on the Unit Sphere[J]. Acta Mathematica Sinica English, 2006, 22(6):1843-1846.

[25] 周民强. 调和分析讲义[M]. 北京：北京大学出版社，1999.

[26] D. K. Palagachev, L. G. Softova. Singular integral operators，Morrey spaces and fine regularity of solutions to PDE's[J]. Potential Analysis，2004，20(3): 237-263.

在学取得成果

一、　　在学期间所获的奖励

2018 年 11 月，获得第十届全国大学生数学竞赛（数学类）三等奖。授奖机构：中国数学普及工作委员会；

2018 年 11 月，获得人民一等奖学金。授奖机构：北京科技大学；

2018 年 11 月，获得优秀三好学生。授奖机构：北京科技大学；

2019 年 10 月, 获得高教社杯全国大学生数学建模竞赛北京赛区二等奖。授奖机构：北京市教育委员会；

2019 年 11 月，获得优秀学生干部。授奖机构：北京科技大学。

二、　　在学期间发表的论文

三、　　在学期间取得的科技成果

致 谢

本文从本人开始接触调和分析到完成，历时一年。在选题及研究过程上，得到了陈艳萍教授的悉心指导。十分感谢陈艳萍教授在本科期间，对本人专业核心课程的讲授，生活学业的关心。本人能够有机会到北京师范大学继续从事调和分析的学习和研究，也得益于陈老师的推荐，在此谨向陈老师致以诚挚的感谢。

本人选择调和分析方向，需要感谢汪飞星教授，刘宇教授的悉心教导，让本人掌握了必要的基础知识，有能力来完成本篇论文中的学术工作。在调和分析方向，参与杨大春教授，陈艳萍教授的讨论班对本篇论文的知识准备极为重要。毕业设计的完成过程中，辅导员高爽，班长宋震对毕业设计相关文件的通知和递交多有帮助，特表感谢。

另外，感谢本篇论文涉及到的学者，没有这些研究工作的帮助和启发，这篇论文也很难完成，完成过程中，本人充分体会到“站在巨人的肩膀上”的重要性。

本人承受了许多好意，才能够完成这份工作，在此对所有对本人给予帮助的人深表感谢。